1.2 ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

ΘΕΩΡΙΑ

1.
Σχετική συχνότητα ενδεχομένου Α

Ονομάζεται το πηλίκο $\mathbf{f_A = \frac{\kappa}{\nu}}$, όπου **ν** **το πλήθος εκτελέσεων** του πειράματος και **κ το πλήθος των πραγματοποιήσεων** του ενδεχόμενου **Α**.

2.
Ιδιότητες της σχετικής συχνότητας των απλών ενδεχομένων

i) $0 \le f_i \le 1, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \nu$

ii) $f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_\nu = 1$

3.
Νόμος μεγάλων αριθμών

Όταν το πλήθος των δοκιμών ενός πειράματος τύχης αυξάνει απεριόριστα, η σχετική συχνότητα ενός εκάστου ενδεχομένου σταθεροποιείται γύρω από κάποιο αριθμό.

Παρατήρηση : Ο αριθμός αυτός δεν είναι πάντοτε ίδιος για κάθε ενδεχόμενο.

4.
Ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα

Είναι τα απλά ενδεχόμενα των οποίων οι σχετικές συχνότητες τείνουν στον ίδιο αριθμό όσο το πλήθος των δοκιμών αυξάνει απεριόριστα .

5.
Κλασικός ορισμός της πιθανότητας

Σε πείραμα τύχης με **ν** ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα , αν το ενδεχόμενο **Α** έχει **κ** στοιχεία, τότε ορίζουμε σαν **πιθανότητα του ενδεχομένου Α** και συμβολίζουμε με **Ρ(Α)**, το πηλίκο

$$\mathbf{P(A) = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\kappa}{\nu}}$$

6.

Ισχύουν οι σχέσεις

- $P(\Omega) = \dfrac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1$
- $P(\varnothing) = \dfrac{0}{N(\Omega)} = 0$
- $0 \le P(A) \le 1$ για οποιοδήποτε ενδεχόμενο Α

7.

Αξιωματικός ορισμός πιθανότητας

Έστω $\boldsymbol{\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu\}}$ ένας δειγματικός χώρος με **πεπερασμένο πλήθος** στοιχείων

α) Ονομάζουμε **πιθανότητα του στοιχειώδους ενδεχόμενου $\boldsymbol{\omega_i}$**, τον αριθμό που συμβολίζουμε με $\boldsymbol{p(\omega_i)}$ και ο οποίος έχει τις ιδιότητες

- $0 \le p(\omega_i) \le 1$
- $p(\omega_1) + p(\omega_2) + \ldots + p(\omega_\nu) = 1$

β) Αν $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa\} \neq \varnothing$ ένα ενδεχόμενο, τότε

- $P(A) = p(\alpha_1) + p(\alpha_2) + \ldots + p(\alpha_\kappa)$ και
- $P(\varnothing) = 0$

8.

Απλός προσθετικός νόμος

Για οποιαδήποτε **ασυμβίβαστα ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου** δειγματικού χώρου **Ω** ισχύει : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

9.

Ιδιότητα συμπληρωματικών ενδεχομένων

$P(A') = 1 - P(A)$

10.

Προσθετικός νόμος

Αν Α, Β ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω, τότε

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

11.
Ιδιότητα υποσυνόλου
Αν $A \subseteq B$ τότε $P(A) \leq P(B)$

12.
Ιδιότητα διαφοράς
$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

12.
Παρατήρηση
Οι κανόνες 8, 9, 10, 11, 12 ισχύουν ανεξαρτήτως του αν τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι ή δεν είναι ισοπίθανα.

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

1.
Προσοχή

Ο τύπος $P(A) = \dfrac{\text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}} = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)}$ ισχύει **μόνο** όταν τα στοιχειώδη ενδεχόμενα του πειράματος τύχης είναι **ισοπίθανα**.

2.
Προσοχή
Σε άσκηση που τα απλά ενδεχόμενα δεν είναι ισοπίθανα, χρησιμοποιούμε τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας.

3.
Προσοχή
Η φράση **'παίρνουμε τυχαία ένα στοιχείο του δειγματικού χώρου'** εξυπακούει ότι τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι **ισοπίθανα**.

4.

Τρόπος εργασίας

Όταν θέλουμε να αποδείξουμε μία ανισότητα πιθανοτήτων, τις ποιο πολλές φορές κάνοντας πράξεις καταλήγουμε σε ισοδύναμη της που είναι προφανής .

Δεν ξεχνάμε τις βασικές ανισότητες $0 \leq P(A) \leq 1$

Αν $A \subseteq B$ τότε $P(A) \leq P(B)$

5.

Τρόπος εργασίας

Όταν θέλουμε να βρούμε την πιθανότητα ενδεχομένου το οποίο διατυπώνεται στην κοινή γλώσσα, θα πρέπει οπωσδήποτε να το αποδώσουμε στην γλώσσα των συνόλων.

6.

Τρόπος εργασίας

Για να αποδείξουμε ότι δύο ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα, δοκιμάζουμε την εις άτοπο απαγωγή.

7.

Να θυμόμαστε

Η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου είναι ίση με την πιθανότητά του.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Από τις οικογένειες που έχουν τρία παιδιά επιλέγουμε μία στην τύχη και εξετάζουμε τα παιδιά της ως προς το φύλλο και την σειρά γέννησης.

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα
Α: Το πρώτο παιδί κορίτσι
Β: Το μεσαίο παιδί αγόρι
Γ: Τουλάχιστον ένα κορίτσι
Δ: Ακριβώς δύο αγόρια
Ε: Το πολύ δύο κορίτσια

Να βρεθούν ο δειγματικός χώρος του πειράματος και η πιθανότητες
$P(A)$, $P(B)$, $P(\Gamma)$, $P(\Delta)$, $P(E)$, $P(A')$, $P(B')$,
$P(A\cap B')$, $P(A\cup B')$, $P[(A-B)\cup(B-A)]$, $P(A\cap B)$, $P(A\cup B)$

Προτεινόμενη λύση

Στη θέση «Φροντιστήριο Α΄ Λυκείου Άλγεβρα 1.1 ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1»

βρίσκουμε $\Omega = \{\text{ΑΑΑ, ΑΑΚ, ΑΚΚ, ΑΚΑ, ΚΑΑ, ΚΑΚ, ΚΚΚ, ΚΚΑ}\}$
άρα $N(\Omega)=8$

$A = \{\text{ΚΑΑ, ΚΑΚ, ΚΚΚ, ΚΚΑ}\}$, $N(A)=4$

$B = \{\text{ΑΑΑ, ΑΑΚ, ΚΑΑ, ΚΑΚ}\}$, $N(B)=4$

$\Gamma = \{\text{ΑΑΚ, ΑΚΚ, ΑΚΑ, ΚΑΑ, ΚΑΚ, ΚΚΚ, ΚΚΑ}\}$,
άρα $N(\Gamma)=7$

$\Delta = \{\text{ΑΑΚ, ΑΚΑ, ΚΑΑ}\}$, $N(\Delta)=3$

$E = \{\text{ΑΑΑ, ΑΑΚ, ΑΚΚ, ΑΚΑ, ΚΑΑ, ΚΑΚ, ΚΚΑ}\}$,
άρα $N(E)=7$

Οπότε από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας βρίσκουμε

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2},\qquad P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{1}{2},\qquad P(\Gamma)=\frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)}=\frac{7}{8}$$

$$P(\Delta)=\frac{N(\Delta)}{N(\Omega)}=\frac{3}{8},\qquad P(E)=\frac{N(E)}{N(\Omega)}=\frac{7}{8}$$

Ακόμα έχουμε ότι $A'=\{\text{ΑΑΑ, ΑΑΚ, ΑΚΑ, ΑΚΚ}\}$, άρα $N(A')=4$

$B'=\{\text{ΑΚΚ, ΑΚΑ, ΚΚΚ, ΚΚΑ}\}$, $N(B')=4$

$A\cap B=\{\text{ΚΑΑ, ΚΑΚ}\}$, $N(A\cap B)=2$

$A\cup B=\{\text{ΚΚΚ, ΚΑΚ, ΚΚΑ, ΚΑΑ, ΑΑΑ, ΑΑΚ}\}$
άρα $N(A\cup B)=6$

$A\cap B'=\{\text{ΚΚΚ, ΚΚΑ}\}$ $N(A\cap B')=2$

$A\cup B'=\{\text{ΚΚΚ, ΚΑΚ, ΚΚΑ, ΚΑΑ, ΑΚΚ, ΑΚΑ}\}$,
άρα $N(A\cup B')=6$

$(A-B)\cup(B-A)=\{\text{ΚΚΚ, ΚΚΑ, ΑΑΑ, ΑΑΚ}\}$,
άρα $N[(A-B)\cup(B-A)]=4$

Οπότε $P(A')=\frac{1}{2}$, $P(B')=\frac{1}{2}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$, $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$

$P(A\cap B')=\frac{1}{4}$, $P(A\cup B')=\frac{3}{4}$, $P[(A-B)\cup(B-A)]=\frac{1}{2}$

2.

Ρίχνουμε ένα ζάρι μία φορά και επιλέγουμε ένα ενδεχόμενο στην τύχη.

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα Α: ένδειξη μικρότερη του 5

Β: ένδειξη άρτιος αριθμός

Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων

i) Πραγματοποιείται το Α

ii) Πραγματοποιείται το Β

iii) Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α, Β

iv) Πραγματοποιείται ένα μόνο από τα Α, Β

Προτεινόμενη λύση

Είναι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ με $N(\Omega) = 6$

i)

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ με $N(A) = 4$, οπότε $P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

ii)

$B = \{2, 4, 6\}$ με $N(B) = 3$, οπότε $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

iii)

Ένα τουλάχιστον από τα Α, Β πραγματοποιείται, είναι το ενδεχόμενο

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ με $N(A \cup B) = 5$, οπότε $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$

iv)

Ένα μόνο από τα Α, Β πραγματοποιείται, είναι το ενδεχόμενο

$(A - B) \cup (B - A) = \{1, 3\} \cup \{6\} = \{1, 3, 6\}$ με $N[(A - B) \cup (B - A)] = 3$,

οπότε $P[(A - B) \cup (B - A)] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

3.

Σ' ένα εργοστάσιο παραγωγής ρουλεμάν, από μία βλάβη του υπολογιστή, παρουσιάστηκε αυξημένος αριθμός ρουλεμάν με όχι κανονικό μέγεθος.
Τα ρουλεμάν με μέγεθος μεγαλύτερο από το κανονικό ήταν διπλάσια από τα ρουλεμάν με μέγεθος μικρότερο από το κανονικό.
Τα ρουλεμάν με μέγεθος κανονικό ήταν πενταπλάσια από τα ρουλεμάν με μέγεθος μικρότερο από το κανονικό.
Επιλέγουμε ένα ρουλεμάν στην τύχη. Να βρείτε τις πιθανότητες

i) Το ρουλεμάν να έχει μέγεθος μικρότερο του κανονικού
ii) Το ρουλεμάν να έχει μέγεθος μεγαλύτερο του κανονικού
iii) Το ρουλεμάν να έχει κανονικό μέγεθος

Προτεινόμενη λύση

Έστω τα ενδεχόμενα μ_1: Μέγεθος μικρότερο του κανονικού
κ: Μέγεθος κανονικό
μ_2: Μέγεθος μεγαλύτερο του κανονικού

i)

Είναι $N(\mu_2) = 2N(\mu_1)$ και $N(\kappa) = 5N(\mu_1)$

Όμως $N(\mu_1) + N(\kappa) + N(\mu_2) = N(\Omega) \Leftrightarrow$

$N(\mu_1) + 5N(\mu_1) + 2N(\mu_1) = N(\Omega)$

$8N(\mu_1) = N(\Omega)$

$$\frac{N(\mu_1)}{N(\Omega)} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow P(\mu_1) = \frac{1}{8}$$

ii)

$$P(\kappa) = \frac{N(\kappa)}{N(\Omega)} = \frac{5N(\mu_1)}{N(\Omega)} = \frac{5}{8}$$

iii)

$$P(\mu_2) = \frac{N(\mu_2)}{N(\Omega)} = \frac{2N(\mu_1)}{N(\Omega)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

4.

Έστω $\Omega = \{x, \ y, \ \zeta, \ \omega\}$ ένας δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης.

i) Αν $P(x) = \frac{1}{2}$, $P(\omega) = \frac{1}{4}$, $P(\zeta) = \frac{1}{8}$ να βρείτε την $P(y)$

ii) Αν $P(\omega) = P(\zeta) = \frac{2}{5}$ και $P(x) = 3P(y)$ να βρείτε τις $P(x)$, $P(y)$

iii) Αν $2P(x) - P(\zeta) + 3P(y) = \frac{9}{8}$ και $P(x) + P(\zeta) - P(y) = \frac{5}{8}$ και

$P(x) - 2P(y) = \frac{1}{4}$

να βρείτε τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων

iv) Αν $A=\{\zeta, y\}$ με $P(A) = \frac{3}{5}$, $B = \{y, \omega\}$ με $P(B) = \frac{1}{3}$ και $P(y) = \frac{1}{4}$

να βρείτε την $P(x)$.

Προτεινόμενη λύση

i)

Είναι $P(x) + P(y) + P(\zeta) + P(\omega) = P(\Omega) = 1 \iff P(y) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$

ii)

$P(x) + P(y) + P(\zeta) + P(\omega) = 1 \iff 3P(y) + P(y) + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = 1$

$P(y) = \frac{1}{20}$ άρα και $P(x) = \frac{3}{20}$

iii)

Λύνοντας το σύστημα των δοσμένων εξισώσεων βρίσκουμε

$P(x) = \frac{1}{2}$, $P(y) = \frac{1}{8}$, $P(\zeta) = \frac{1}{4}$

Όμως $P(x) + P(y) + P(\zeta) + P(\omega) = 1 \iff \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + P(\omega) = 1 \iff P(\omega) = \frac{1}{8}$

iv)

$P(A) = P(\zeta) + P(y) \iff \frac{3}{5} = P(\zeta) + \frac{1}{4} \iff P(\zeta) = \frac{7}{20}$

$P(B) = P(y) + P(\omega) \iff \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + P(\omega) \iff P(\omega) = \frac{1}{12}$

Και αφού $P(x) + P(y) + P(\zeta) + P(\omega) = 1$, θα είναι $P(x) = \frac{19}{60}$

5.

Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρείς φορές τη μία κατόπιν της άλλης και επιλέγουμε ένα αποτέλεσμα στην τύχη.

i) Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος

ii) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων

Α: Οι δύο πρώτες ρίψεις γράμματα

Β: Ένα τουλάχιστον κεφάλι

Γ: Πρώτη ρίψη γράμματα ή τρίτη ρίψη γράμματα

Δ: Πρώτη ρίψη κεφάλι και δεύτερη ρίψη γράμματα .

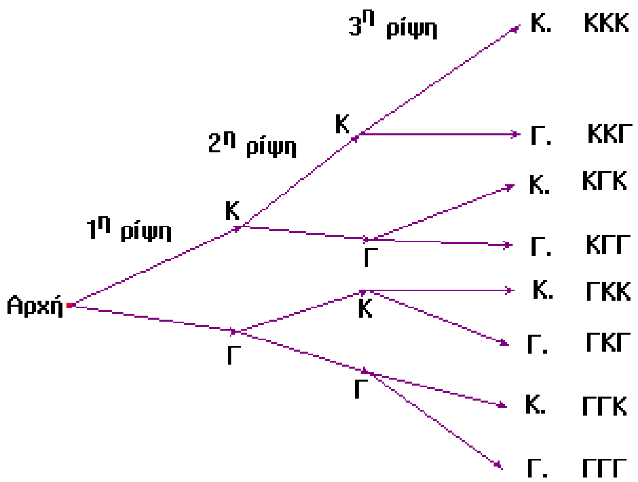
iii) Να βρείτε επίσης τις πιθανότητες των ενδεχόμενων

$A-B$, $B\cap\Gamma$, $(\Gamma-\Delta)\cup(\Delta-\Gamma)$,

Πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα Β, Γ και Δ

Προτεινόμενη λύση

Σχεδιάζουμε το παρακάτω δεντροδιάγραμμα όπου Κ= κεφάλι , Γ= γράμματα



i)

$\Omega = \{$ ΚΚΚ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΚΚΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ $\}$ με $N(\Omega) = 8$

ii)

$A = \{$ ΓΓΚ, ΓΓΓ$\}$ με $N(A) = 2$, άρα $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{1}{4}$

$B = \{$ ΚΚΚ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΚΚΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ$\}$ με $N(B) = 7$,

άρα $P(B) = \dfrac{N(B)}{N(\Omega)} = \dfrac{7}{8}$

$\Gamma = \{$ ΚΓΓ, ΚΚΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ $\}$ με $N(\Gamma) = 6$, $P(\Gamma) = \dfrac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \dfrac{6}{8}$

$\Delta = \{$ΚΓΚ, ΚΓΓ $\}$ με $N(\Delta) = 2$, άρα $P(\Delta) = \dfrac{N(\Delta)}{N(\Omega)} = \dfrac{1}{4}$

iii)

- $A-B = \{\Gamma\,\Gamma\,\Gamma\}$ με $N(A-B) = 1$, άρα $P(A-B) = \dfrac{N(A-B)}{N(\Omega)} = \dfrac{1}{8}$
- $B\cap\Gamma = \{$ΚΓΓ, ΚΚΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ $\}$ με $N(B\cap\Gamma) = 5$

Άρα $P(B\cap\Gamma)=\dfrac{N(B\cap\Gamma)}{N(\Omega)}=\dfrac{5}{8}$

- $(\Gamma-\Delta)\cup(\Delta-\Gamma)=\{$ ΚΚΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ$\}\cup\{$ΚΓΚ$\}=$
  $=\{$ ΚΚΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ, ΚΓΚ $\}$
  με $N[(\Gamma-\Delta)\cup(\Delta-\Gamma)]=6$,
  άρα $P[(\Gamma-\Delta)\cup(\Delta-\Gamma)]=\dfrac{N[(\Gamma-\Delta)\cup(\Delta-\Gamma)]}{N(\Omega)}=\dfrac{6}{8}$
- Το ενδεχόμενο πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα Β, Γ και Δ είναι το $B\cap\Gamma\cap\Delta=\{$ΚΓΓ$\}$ με $N(B\cap\Gamma\cap\Delta)=1$,
  άρα $P(B\cap\Gamma\cap\Delta)=\dfrac{N(B\cap\Gamma\cap\Delta)}{N(\Omega)}=\dfrac{1}{8}$

6.

Σ' έναν αγώνα παίρνουν μέρος τρία αυτοκίνητα α, β, γ. Το α έχει διπλάσια πιθανότητα να κερδίσει απ' ότι το β και το β έχει διπλάσια πιθανότητα να κερδίσει απ' ότι το γ. Να βρείτε ποια είναι η πιθανότητα κάθε αυτοκίνητου να κερδίσει τον αγώνα.

Προτεινόμενη λύση

Έστω τα ενδεχόμενα : Α: κερδίζει το α
Β: κερδίζει το β
Γ: κερδίζει το γ

Τότε προφανώς έχουμε $P(A)+P(B)+P(\Gamma)=1$

Από υποθέσεις είναι $P(A)=2P(B)$ και
$P(B)=2P(\Gamma)$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $P(A)=\dfrac{4}{7}$, $P(B)=\dfrac{2}{7}$, $P(\Gamma)=\dfrac{1}{7}$

7.

Τα δυνατά αποτελέσματα ω_1, ω_2, ω_3 ενός πειράματος τύχης πραγματοποιούνται με σχετικές συχνότητες $\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{2}{\alpha}$, $\dfrac{3}{\alpha}$ αντίστοιχα. Να βρείτε το α ώστε οι συχνότητες αυτές να αντιπροσωπεύουν τις πιθανότητες των ενδεχομένων ω_1, ω_2, ω_3

Προτεινόμενη λύση

Πρέπει $P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)=1$ και $P(\omega_i)\le 1$

$P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)=1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{2}{\alpha}+\dfrac{3}{\alpha}=1 \Leftrightarrow \alpha=6$

Για $\alpha=6$ επαληθεύεται και η ανίσωση $P(\omega_i)\le 1$

8.

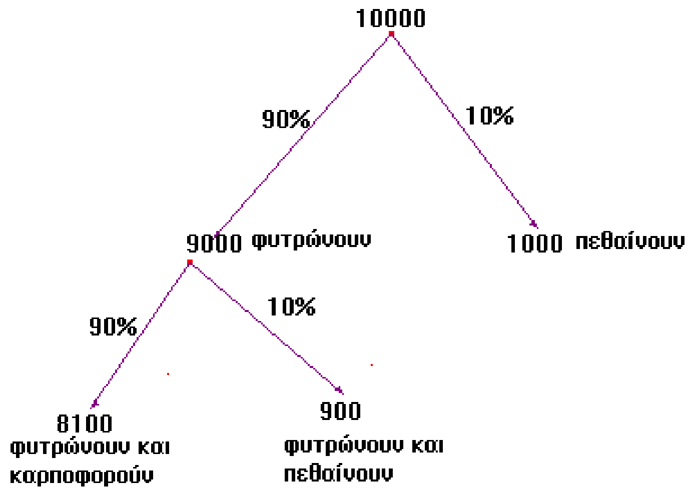
Είναι γνωστό ότι από 10000 σπόρους που φυτεύτηκαν θα φυτρώσει το 90%.
Από τα φυτά που θα φυτρώσουν μόνο το 90% θα ζήσει και θα καρποφορήσει.
Αν φυτέψουμε έναν σπόρο, ποια είναι η πιθανότητα των ενδεχομένων :

Α: ο σπόρος να μην φυτρώσει

Β: ο σπόρος να φυτρώσει αλλά να πεθάνει

Γ: ο σπόρος να καρποφορήσει

Προτεινόμενη λύση



Με βάση το παραπάνω δενδροδιάγραμμα θα έχουμε

$P(A) = \frac{1000}{10000} = \frac{1}{10}$, $P(B) = \frac{900}{10000} = \frac{9}{100}$ και $P(\Gamma) = \frac{8100}{10000} = \frac{81}{100}$

9.

Ένα δείγμα 50 οικογενειών ρωτήθηκε ως προς τον αριθμό των παιδιών τους. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον πίνακα

Αρ. Παιδιών	0	1	2	3	4	5 ή περισσότερα
Αρ. οικογενειών	6	14	13	9	5	3

Επιλέγουμε τυχαία μία οικογένεια. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων

Α: να μην έχει παιδιά

Β: να έχει παιδιά αλλά όχι περισσότερα από 3

Γ: να έχει περισσότερα από 3 παιδιά

Δ: να μην έχει 3 ή 4 παιδιά

Ε: να έχει λιγότερα από 2 ή περισσότερα από 4

Προτεινόμενη λύση

$N(A) = 6$ άρα $P(A) = \frac{6}{50}$

$N(B) = 36$ άρα $P(B) = \frac{36}{50}$

$N(\Gamma) = 8$ άρα $P(\Gamma) = \frac{8}{50}$

$N(\Delta) = 36$ άρα $P(\Delta) = \frac{36}{50}$

$N(E) = 23$ άρα $P(E) = \frac{23}{50}$

10.

Ο παρακάτω πίνακας αναφέρεται στους ασθενείς που πάσχουν από διαβήτη

ηλικία ασθενούς	ελαφριά περίπτωση		σοβαρή περίπτωση	
	διαβητικοί γονείς		διαβητικοί γονείς	
	ναί	όχι	ναί	όχι
κάτω των 40	15%	10%	8%	2%
άνω των 40	15%	20%	20%	10%

Επιλέγουμε έναν ασθενή στην τύχη και έστω τα ενδεχόμενα

A: Να έχει σοβαρή περίπτωση

B: Να είναι κάτω των 40

Γ: Οι γονείς του να είναι διαβητικοί

i) Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$, $P(\Gamma)$, $P(B \cap \Gamma)$, $P(A \cap B \cap \Gamma)$

ii) Να περιγράψετε λεκτικά τα ενδεχόμενα $A' \cap B'$, $A' \cup \Gamma'$, $A' \cap B \cap \Gamma'$ και να βρείτε τις πιθανότητές τους.

Προτεινόμενη λύση

i)

Από τον πίνακα φαίνεται ότι οι ασθενείς που είναι σοβαρά είναι το 40% , άρα $P(A) = 40\%$

Οι ασθενείς που είναι κάτω των 40 είναι το 35% , άρα $P(B) = 35\%$

Οι ασθενείς που έχουν διαβητικούς γονείς είναι το 58% , άρα $P(\Gamma) = 58\%$

Οι ασθενείς που είναι κάτω των 40 με διαβητικούς γονείς είναι το 23%, άρα $P(B \cap \Gamma) = 23\%$

Οι ασθενείς που είναι σοβαρά και είναι κάτω των 40 και οι γονείς τους είναι διαβητικοί είναι το 8%, άρα $P(A \cap B \cap \Gamma) = 8\%$

ii)

Το ενδεχόμενο $A' \cap B'$ λεκτικά διατυπώνεται ως εξής : Έχει ελαφριά περίπτωση και είναι άνω των 40. Εύκολα βρίσκουμε ότι $P(A' \cap B') = 35\%$

Το ενδεχόμενο $A' \cup B'$ λεκτικά διατυπώνεται ως εξής : Έχει ελαφριά περίπτωση ή οι γονείς του δεν είναι διαβητικοί. Εύκολα βρίσκουμε ότι $P(A' \cup B') = 72\%$

Το ενδεχόμενο $A' \cap B \cap \Gamma'$ λεκτικά διατυπώνεται ως εξής : Έχει ελαφριά περίπτωση και είναι κάτω των 40 και οι γονείς του δεν είναι διαβητικοί. Εύκολα βρίσκουμε ότι $P(A' \cap B \cap \Gamma') = 10\%$.

11.

Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = 0{,}7$, $P(B) = 0{,}5$ και $P(A \cap B) = 0{,}3$. Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχόμενων

i) Δεν πραγματοποιείται το A

ii) Ένα τουλάχιστον από τα A, B πραγματοποιείται

iii) Δεν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα A, B

iv) Κανένα από τα A, B δεν πραγματοποιείται

v) Πραγματοποιείται μόνο το A

vi) Ένα μόνο από τα A, B πραγματοποιείται

Προτεινόμενη λύση

i)

Δεν πραγματοποιείται το A σημαίνει ότι πραγματοποιείται το A'.

Άρα $P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

ii)

Ένα τουλάχιστον από τα A, B πραγματοποιείται σημαίνει ότι πραγματοποιείται το ενδεχόμενο $A \cup B$.

Προσθετικός νόμος: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}7 + 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}9$

iii)

Δεν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα A, B σημαίνει ότι πραγματοποιείται το ενδεχόμενο $(A \cap B)'$. Άρα $P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

iv)

Κανένα από τα A , B δεν πραγματοποιείται σημαίνει ότι πραγματοποιείται το ενδεχόμενο $(A \cup B)'$. Άρα $P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$

v)

Πραγματοποιείται μόνο το A σημαίνει ότι πραγματοποιείται το ενδεχόμενο $A - B$.

Άρα $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}7 - 0{,}3 = 0{,}4$

vi)

Ένα μόνο από τα A, B πραγματοποιείται σημαίνει ότι πραγματοποιείται το A και όχι το B ή πραγματοποιείται το B και όχι το A.

Δηλαδή πραγματοποιείται το ενδεχόμενο $(A - B) \cup (B - A)$.

Από τον προσθετικό νόμο έχουμε

$$
\begin{aligned}
P[(A - B) \cup (B - A)] &= P(A - B) + P(B - A) - P[(A - B) \cap (B - A)] \\
&= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \\
&= 0{,}7 - 0{,}3 + 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}6 \ .
\end{aligned}
$$

12.

Σ’ ένα κλουβί υπάρχουν 20 καναρίνια και 36 κοτσύφια. Τα τέσσερα πέμπτα των καναρινιών και τα μισά κοτσύφια κελαηδάνε. Εκλέγουμε ένα πουλί στην τύχη.
Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων

i) Είναι καναρίνι
ii) Είναι κοτσύφι και κελαηδάει
iii) Το πουλί κελαηδάει
iv) Είναι καναρίνι ή κελαηδάει

Προτεινόμενη λύση

Έστω Α: Το πουλί είναι καναρίνι
Β: Το πουλί είναι κοτσύφι
Γ: Το πουλί κελαηδάει

Γνωρίζουμε ότι τα καναρίνια που κελαηδάνε είναι $\frac{4}{5}\cdot 20 = 16$
και τα κοτσύφια που κελαηδάνε είναι 18,
ενώ το σύνολο των πουλιών είναι 56

Οπότε **i)** Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(A) = \frac{20}{56}$

ii) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(B \cap \Gamma) = \frac{18}{56}$

iii) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(\Gamma) = \frac{16}{56} + \frac{18}{56} = \frac{34}{56}$

iv) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(A \cup \Gamma) = P(A) + P(\Gamma) - P(A \cap \Gamma)$

$$= \frac{20}{56} + \frac{34}{56} - \frac{16}{56} = \frac{38}{56}$$

$$= \frac{38}{56}$$

13.

Σ’ έναν αγώνα, η πιθανότητα ένας αθλητής να νικήσει, είναι πενταπλάσια από την πιθανότητα να χάσει. Να βρείτε την πιθανότητα ο αθλητής να νικήσει στον αγώνα.

Προτεινόμενη λύση

Έστω Ν το ενδεχόμενο “ο αθλητής νικάει στον αγώνα”.
Τότε Ν΄ είναι το ενδεχόμενο “ ο αθλητής χάνει ”
Από υπόθεση έχουμε $P(N) = 5P(N') \Leftrightarrow P(N) = 5(1 - P(N))$

$$P(N) = 5 - 5P(N)$$

$$P(N) = \frac{5}{6}$$

14.

Έστω A, B δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω, με $P(A) = 0,7$ και $P(B) = 0,8$.

i) Εξετάστε αν τα A, B είναι ασυμβίβαστα

ii) Δείξτε ότι $0,5 \le P(A \cap B) \le 0,7$

iii) Δείξτε ότι $P(A \cup B)' \le 0,2$

Προτεινόμενη λύση

i)

Αν τα A, B είναι ασυμβίβαστα, τότε $A \cap B = \varnothing$, οπότε από τον απλό προσθετικό νόμο έχουμε ότι

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,7 + 0,8 = 1,5 > 1$$

που είναι άτοπο

ii)

Για την ανίσωση $P(A \cap B) \le 0,7 \Leftrightarrow P(A \cap B) \le P(A)$

που ισχύει αφού $(A \cap B) \subseteq A$

β)

Για την ανίσωση $P(A \cap B) \ge 0,5 \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cup B) \ge 0,5$

$$0,7 + 0,8 - P(A \cup B) \ge 0,5$$

$$P(A \cup B) \le 1$$

η οποία είναι αληθής .

iii)

$$P(A \cup B)' \le 0,2 \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) \le 0,2$$

$$P(A \cup B) \ge 0,8$$

$$P(A \cup B) \ge P(B)$$

που ισχύει αφού $B \subseteq (A \cup B)$.

15.
Έστω A , B δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου. Αν $P(A') \le 0{,}28$ και $P(B') \le 0{,}71$, δείξτε ότι

i) $P(A \cap B) \ge 1{,}01 - P(A \cup B)$

ii) Το ενδεχόμενο $A \cap B$ δεν είναι το κενό.

Προτεινόμενη λύση

i)

$P(A \cap B) \ge 1{,}01 - P(A \cup B) \quad \Leftrightarrow \quad P(A) + P(B) - P(A \cup B) \ge 1{,}01 - P(A \cup B)$

$P(A) + P(B) \ge 1{,}01$

$1 - P(A') + 1 - P(B') \ge 1{,}01$

$P(A') + P(B') \le 0{,}99$ η οποία είναι προφανής, αφού προκύπτει με πρόσθεση των υποθέσεων κατά μέλη .

ii)

Έστω ότι $A \cap B = \varnothing$. Τότε $P(A \cap B) = 0$

Το πρώτο ερώτημα που αποδείξαμε δίνει $0 \ge 1{,}01 - P(A \cup B) \quad \Leftrightarrow$

$P(A \cup B) \ge 1{,}01$ πράγμα άτοπο

Άρα $A \cap B \ne \varnothing$.